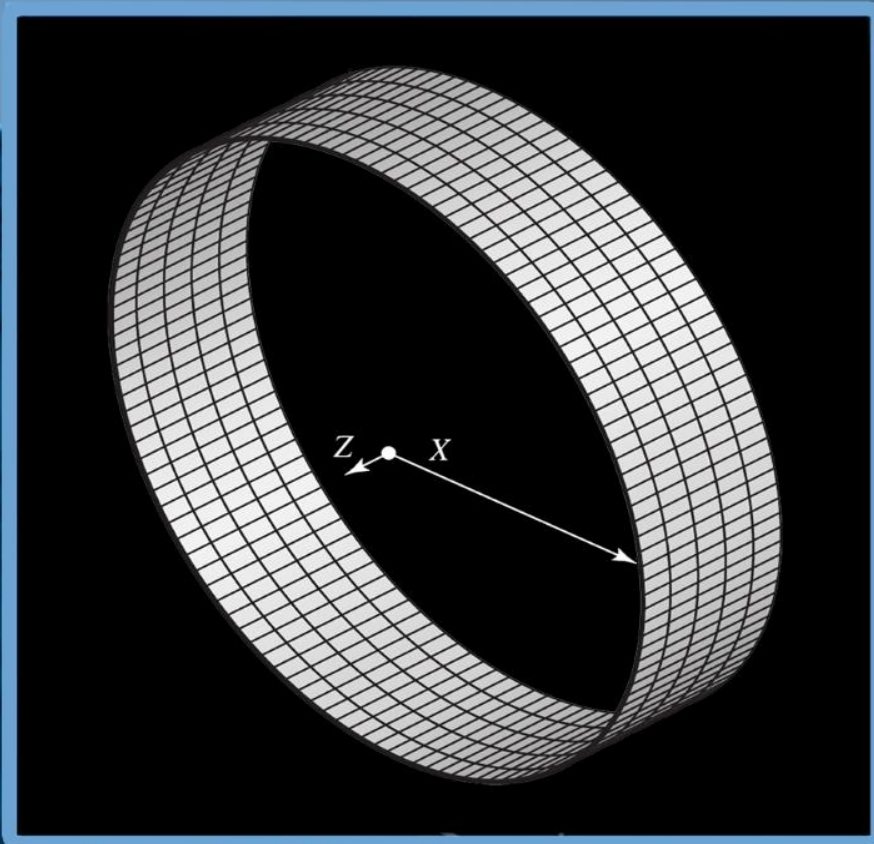


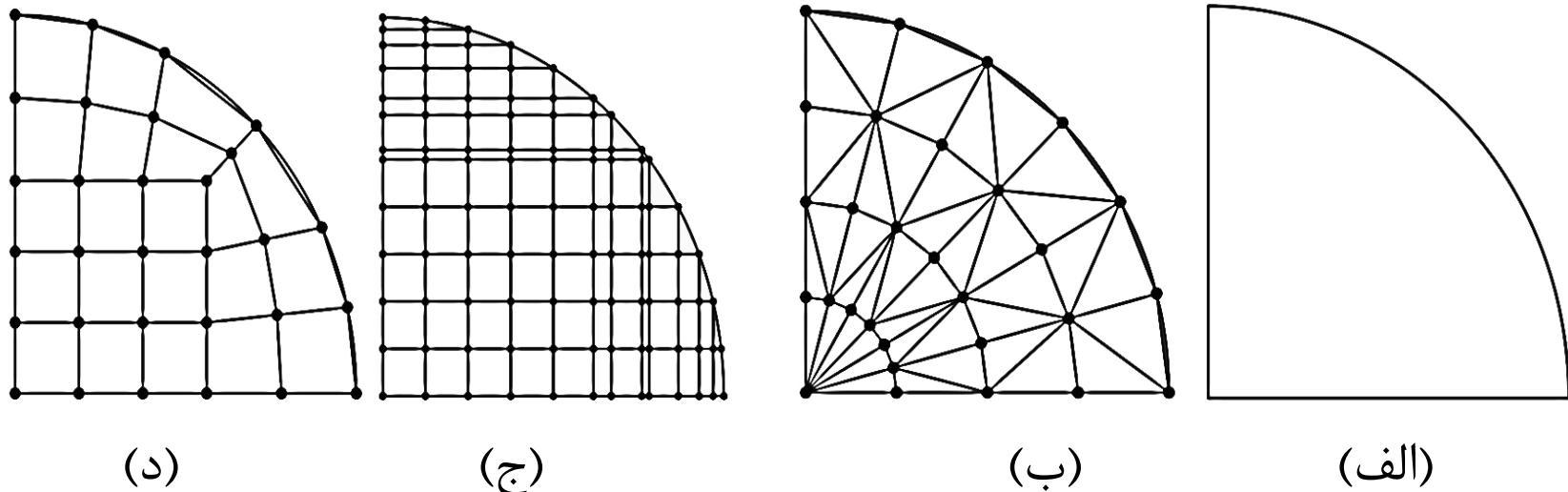
فصل دهم



المان های ایزوپارامتریک

مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران
مرجع اصلی:

مقدمه

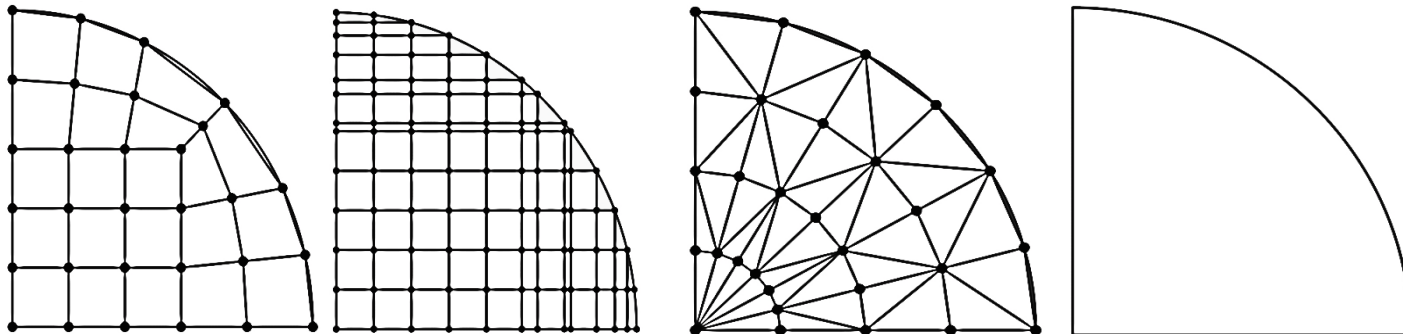


(الف) یک دامنه مدلسازی شده با:

(ب) المان‌های مثلثی. (ج) المان‌های مستطیلی. (د) المان‌های چهار ضلعی ایزوپارامتریک

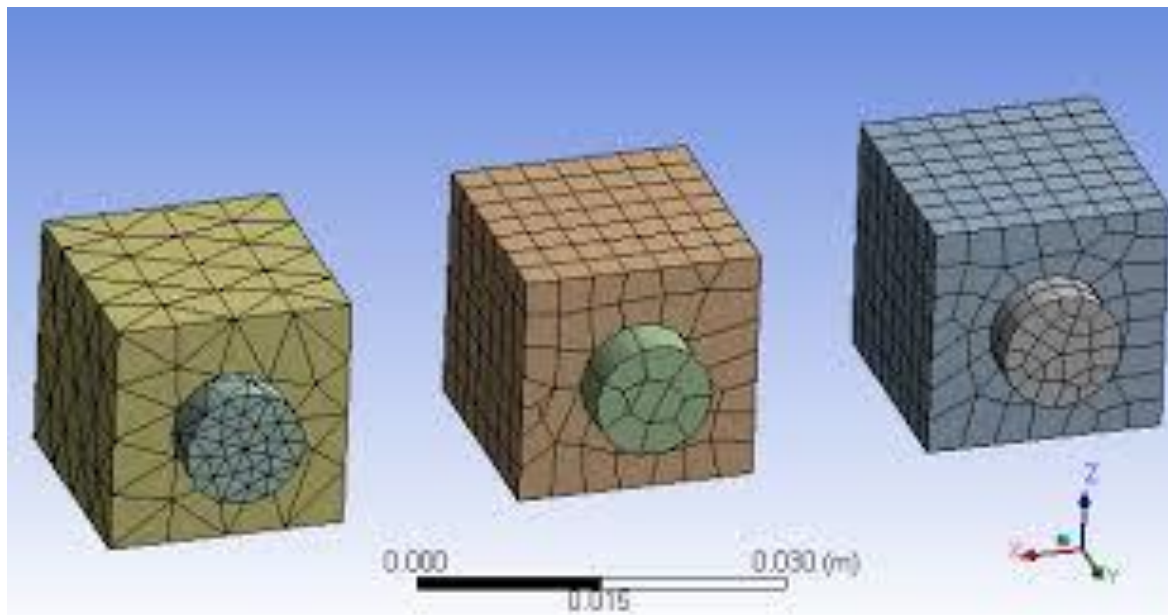
مقدمه

- ❖ المان‌های مستطیلی و آجری برای هندسه‌های نامنظم کارایی مؤثر ندارند.
 - ❖ المان‌های مثلثی و هرمی برای برخی هندسه‌ها منجر به نسبت ظاهر بزرگ و یا تعداد المان زیاد می‌شوند.
 - ❖ نسبت ظاهر بزرگتر
 - ❖ ترکیب انواع المان‌ها
- کاهش دقت روش اجزاء محدود
- تأثیر نامطلوب بر همگرایی جواب‌ها



مقدمه

❖ المان‌های با لبه‌ها یا سطوح منحنی شکل برای مدلسازی هندسه‌های پیچیده



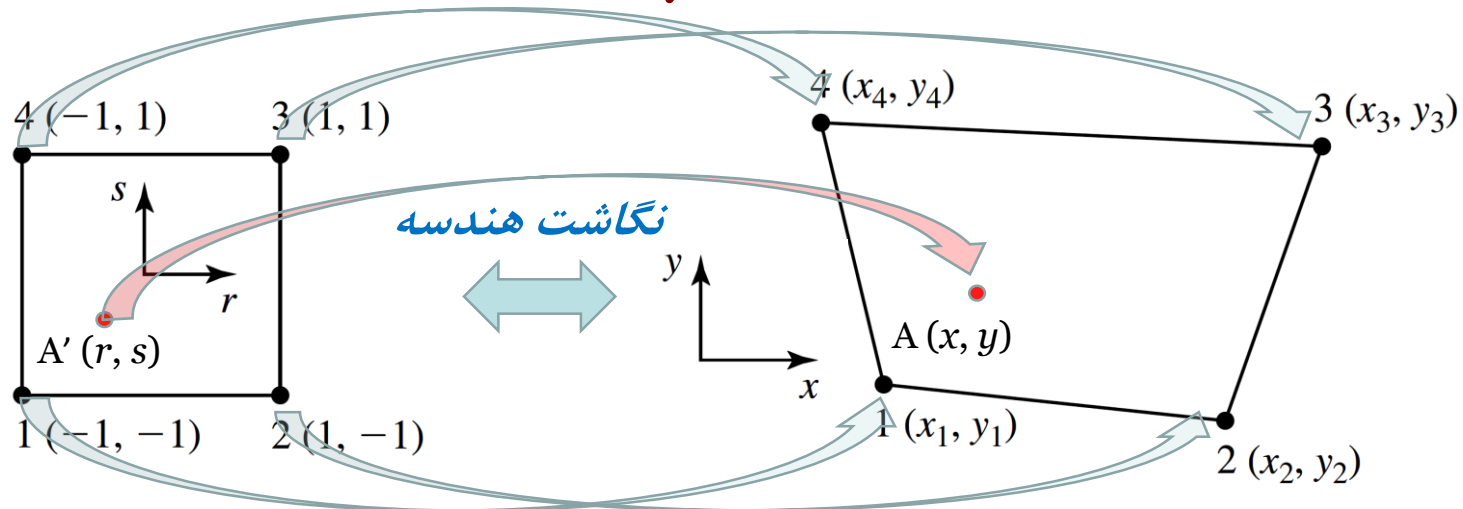
(ج)

(ب)

(الف)

(الف و ب) المان‌های ایزوپارامتریک شش وجهی. (ج) المان‌های هرمی

نگاشت هندسه



المان مرجع

در دستگاه مختصات طبیعی

$$\begin{aligned}(r, s) &= (-1, -1) \Rightarrow (x_1, y_1) \\(r, s) &= (1, -1) \Rightarrow (x_2, y_2) \\(r, s) &= (1, 1) \Rightarrow (x_3, y_3) \\(r, s) &= (-1, 1) \Rightarrow (x_4, y_4)\end{aligned}$$

المان نگاشت یافته

در دستگاه مختصات کلی

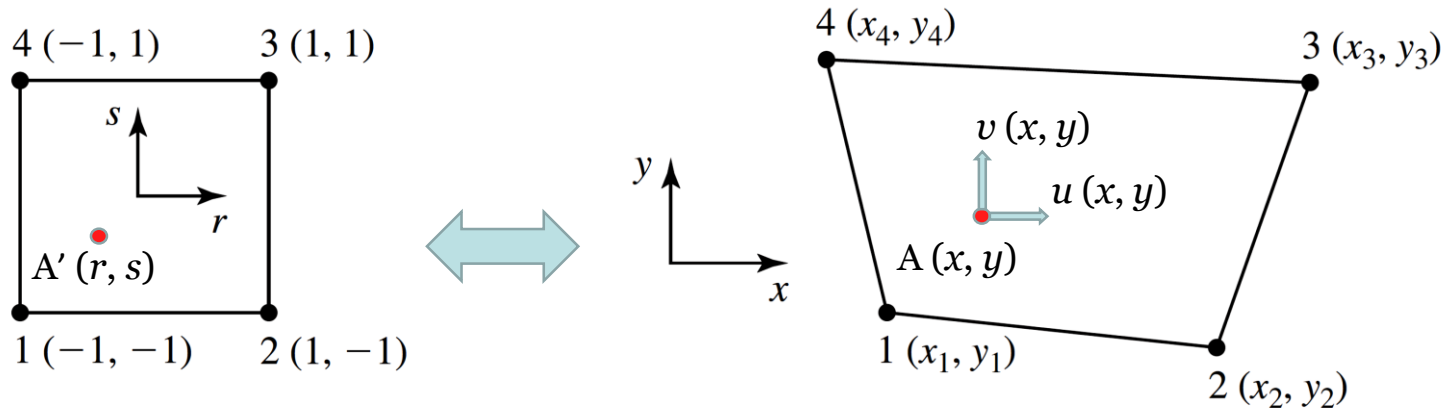
$$x = \sum_{i=1}^4 G_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 G_i y_i$$

G_i : توابع درونیاب هندسه

این توابع باید به نحوی تعیین شوند که دارای مقدار واحد در گره نظیرشان و مقدار صفر در گره‌های دیگر باشند.

نگاشت ایزوپارامتریک



$$\phi = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \phi_i \quad \phi \equiv u \text{ or } v$$

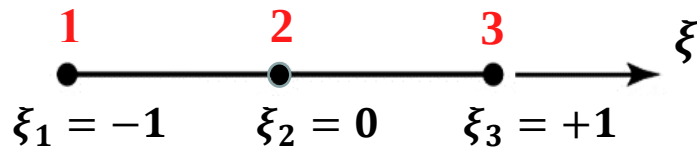
$$x \text{ or } y = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) x_i \text{ or } y_i$$

اگر توابع درونیاب هندسه همان توابع درونیات متغیر میدانی (تغییر مکان) انتخاب شوند، نگاشت ایزوپارامتریک می باشد.

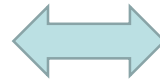
اگر توابع درونیاب هندسه نسبت به توابع درونیاب متغیر میدانی (تغییر مکان) دارای درجه بالاتری باشند (از نقاط گرهی بیشتری درونیابی شوند)، نگاشت سوپراپارامتریک بوده و هنگامی که شرایط به عکس این باشد، نگاشت ساب پارامتریک است.

نمایش ایزوپارامتریک در فضای یک بعدی

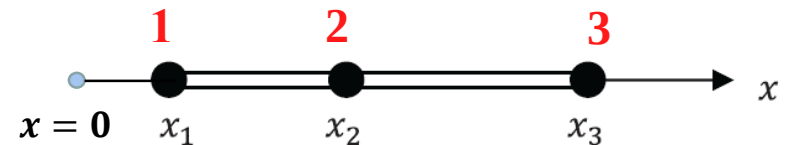
المان مرجع



نمایش



المان کلی



$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) x_i$$

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)$$

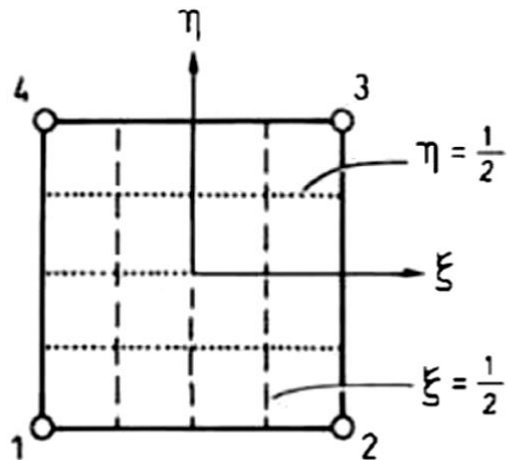
$$N_2(\xi) = -1(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$$

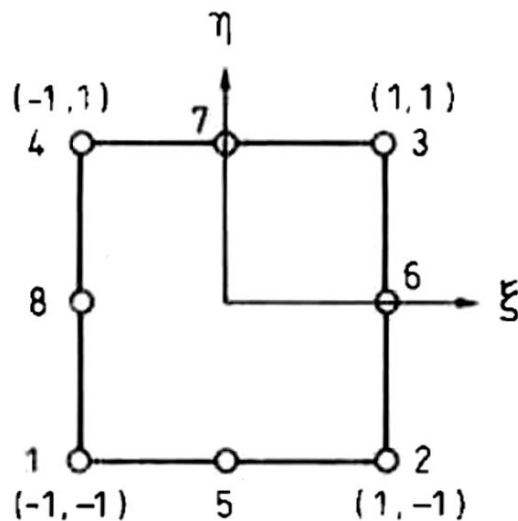
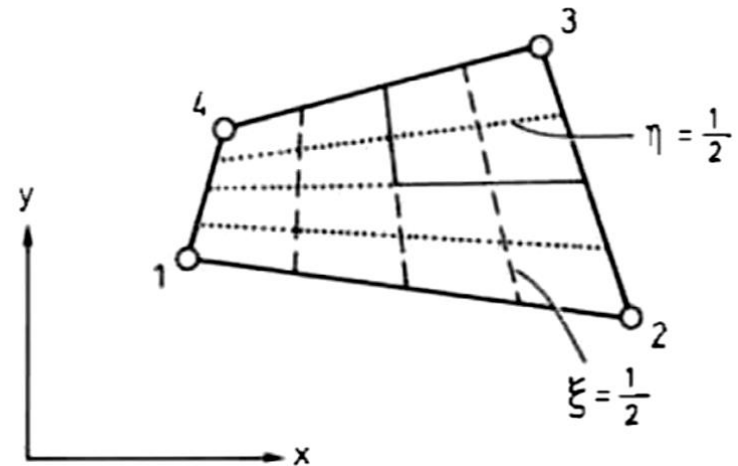
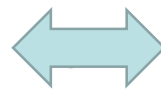
نگاشت ایزوپارامتریک در فضای دوبعدی

المان مرجع

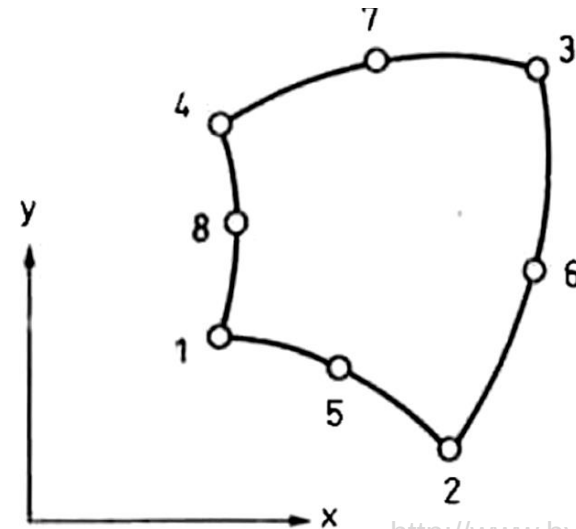
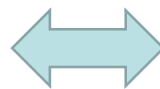
المان کلی



نگاشت



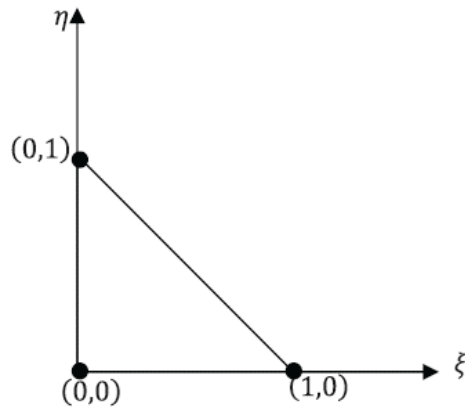
نگاشت



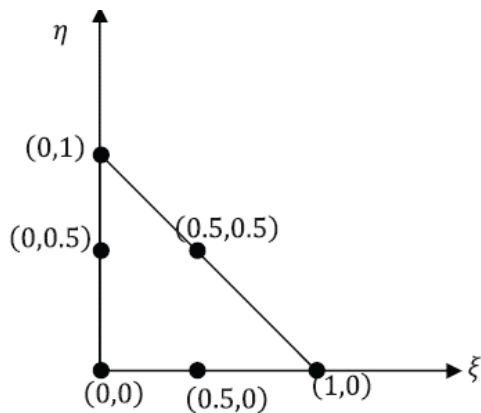
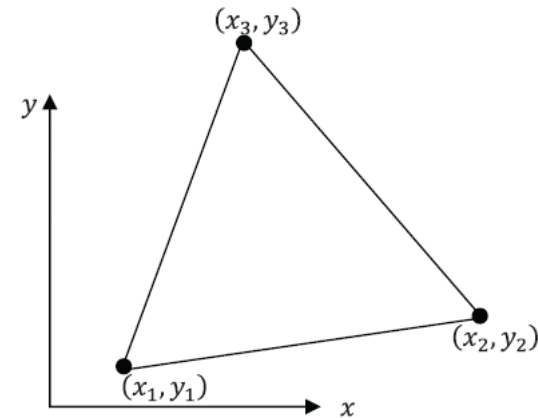
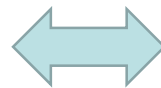
نگاشت ایزوپارامتریک در فضای دوبعدی

المان مرجع

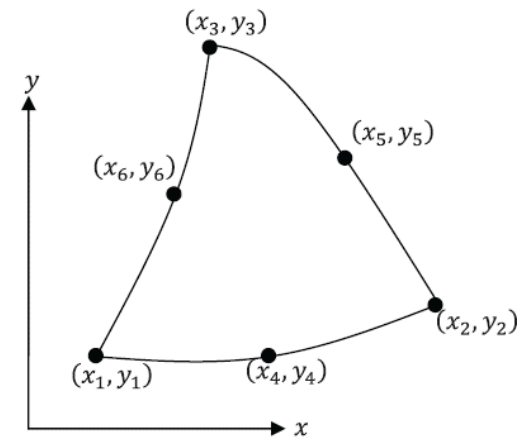
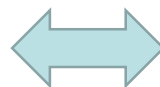
المان کلی



نگاشت



نگاشت

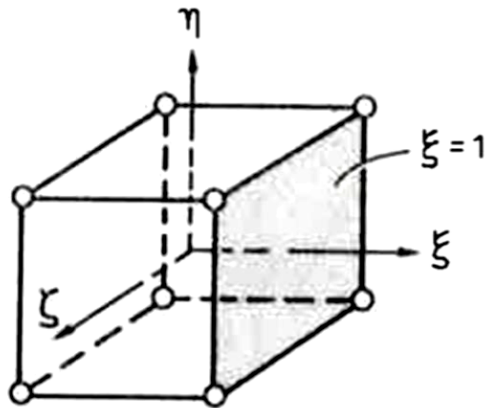


مماشت ایزوپارامتریک در فضای سه بعدی

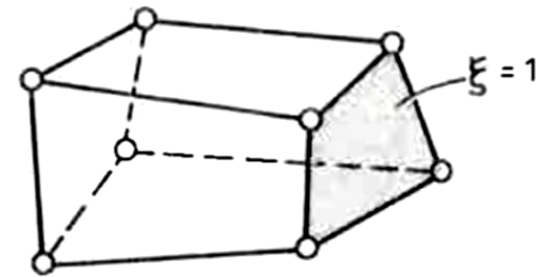
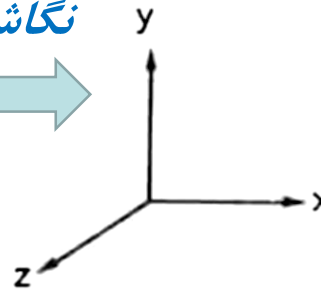
المان مرجع

المان کلی

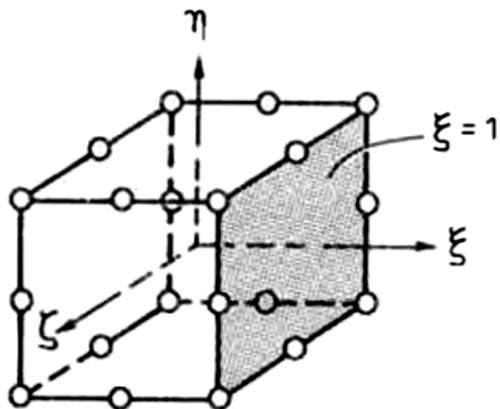
المان آجری
۸ گرهی



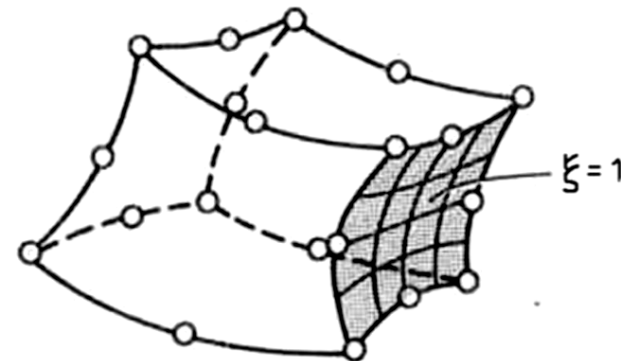
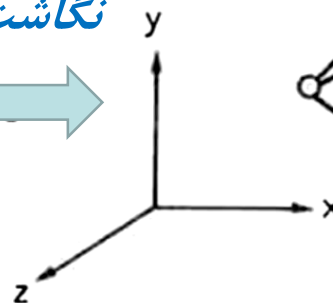
نگاشت



المان آجری
۲۰ گرهی

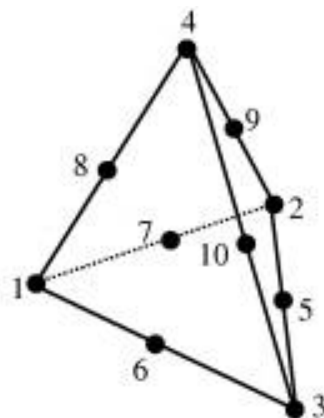


نگاشت



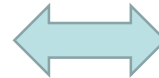
نگاشت ایزوپارامتریک در فضای سه بعدی

المان مرجع

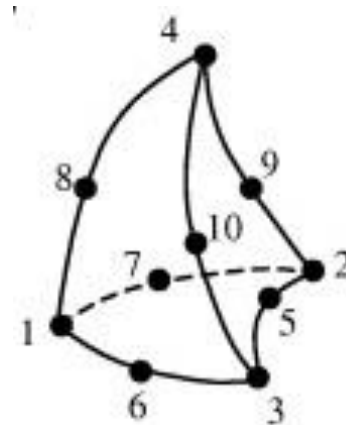


المان هرمی
۱۰ گرهی

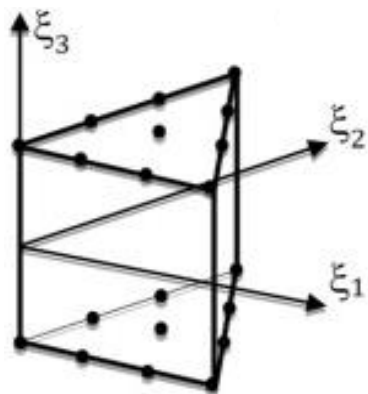
نگاشت



المان کلی

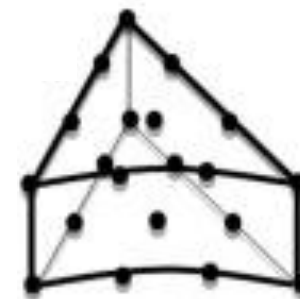
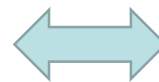


FEM for 3D Solid Elements



المان منشور مثلثی
۲۰ گرهی

نگاشت



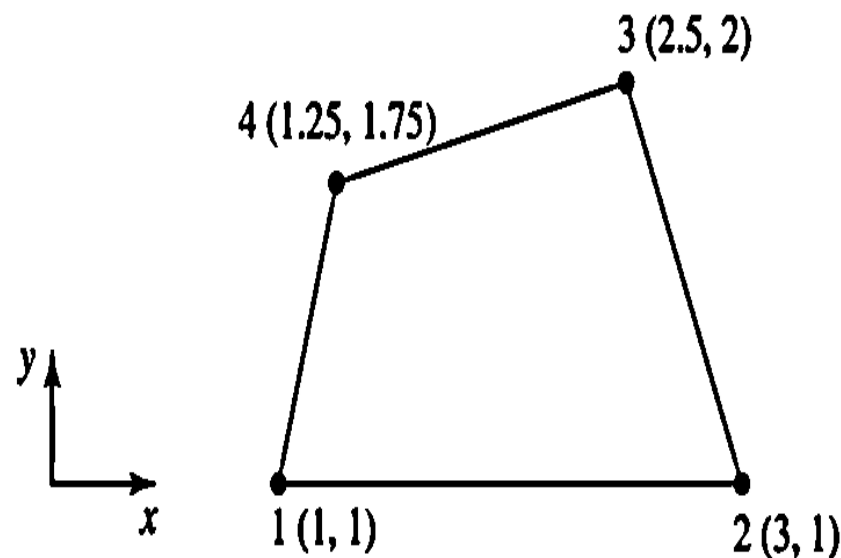
Composite Structures

مثال ۱

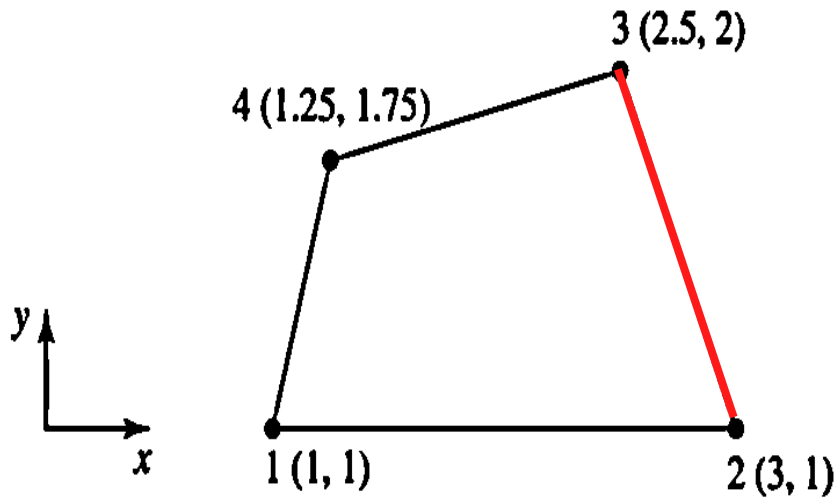
نشان دهید که نگاشت زیر، به درستی خط واصل بین گره‌های ۲ و ۳ المان نشان داده شده را توصیف می‌کند و مختصات (X, Y) متناظر با $(r, s) = (1, 0.5)$ را تعیین کنید.

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) y_i$$



مثال ۱



حل:

معادله خطی که از ۲ و ۳ عبور می‌کند:

$$y = mx + b$$

گره ۲: $1 = 3m + b$

گره ۳: $2 = 2.5m + b$

$$m = -2$$

$$b = 7$$

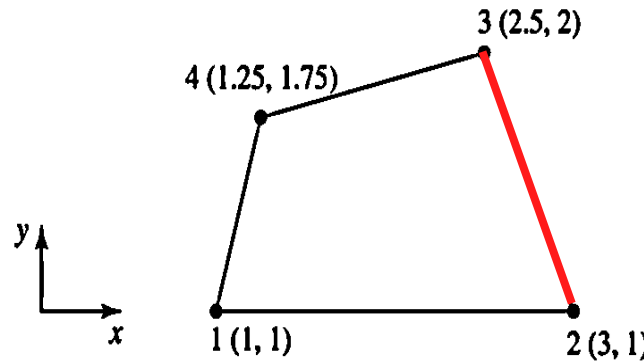
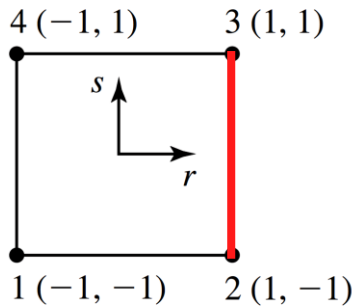


$$y = -2x + 7$$

لذا معادله خط ۲-۳ در دستگاه X و Y :

مثال ۱

نگاشت:



$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) x_i$$

$$x = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1) + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(3) + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(2.5) + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1.25)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) y_i$$

$$y = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1) + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1) + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(2) + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1.75)$$

ضلع ۲-۳: $r=1$ و در نتیجه

$$x = \frac{3}{2}(1-s) + \frac{2.5}{2}(1+s) = \frac{5.5}{2} - \frac{0.5}{2}s$$

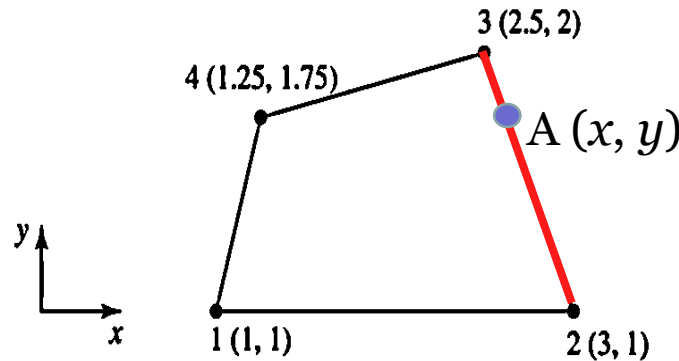
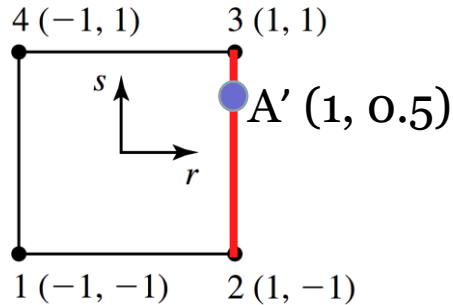
$$y = \frac{1}{2}(1-s) + (1+s) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}s$$

با حذف s

$$2x + y = 7$$

که با رابطه قبل یکسان می‌باشد

مثال ۱



$$x = \frac{5.5}{2} - \frac{0.5}{2}s$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}s$$

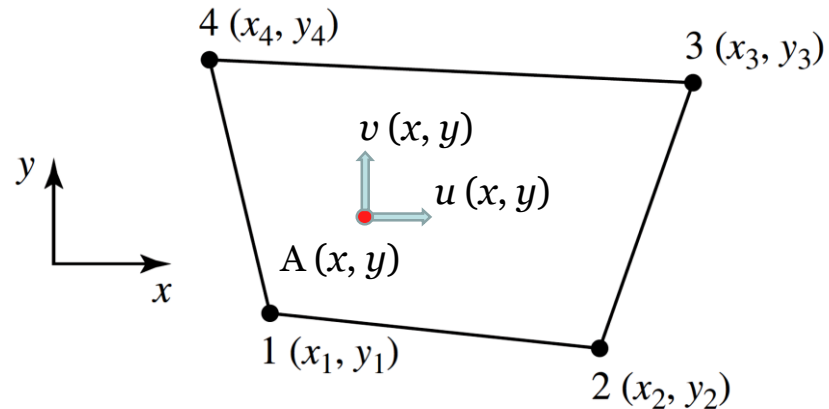
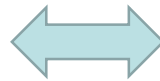
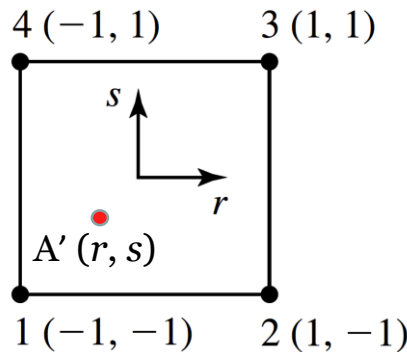
رابطه X و Y با r و s در خط ۲-۳ (با $r=1$) چنین شد:

لذا برای نقطه A' با مختصات طبیعی $(r,s)=(1,0.5)$ بر روی این خط داریم:

$$x_A = \frac{5.5}{2} - \frac{0.5}{2}(0.5) = 2.625$$

$$y_A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(0.5) = 1.750$$

مشتق‌گیری - محضات طبیعی



$$\phi = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \phi_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(r, s)}{\partial x} \phi_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned}$$

محاسبه مشتقات جزئی متغیر میدانی
مستلزم محاسبه مشتقات جزئی هر
یک از توابع درونیاب می‌باشد:

مشق‌گیری - محضات طبیعی

برای محاسبه مشتقات جزئی توابع نسبت به دستگاه مختصات کلی، به روش عکس عمل می‌کنیم یعنی:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}\end{aligned} \quad i = 1, 4$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 4 \quad \text{یا به فرم ماتریسی:}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} [N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} [N]$$

برای محاسبه مشتقات توابع درونیاب:

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

ماتریس ژاکوبین

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 4$$

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) y_i$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix}$$

عکس ماتریس ژاکوبین

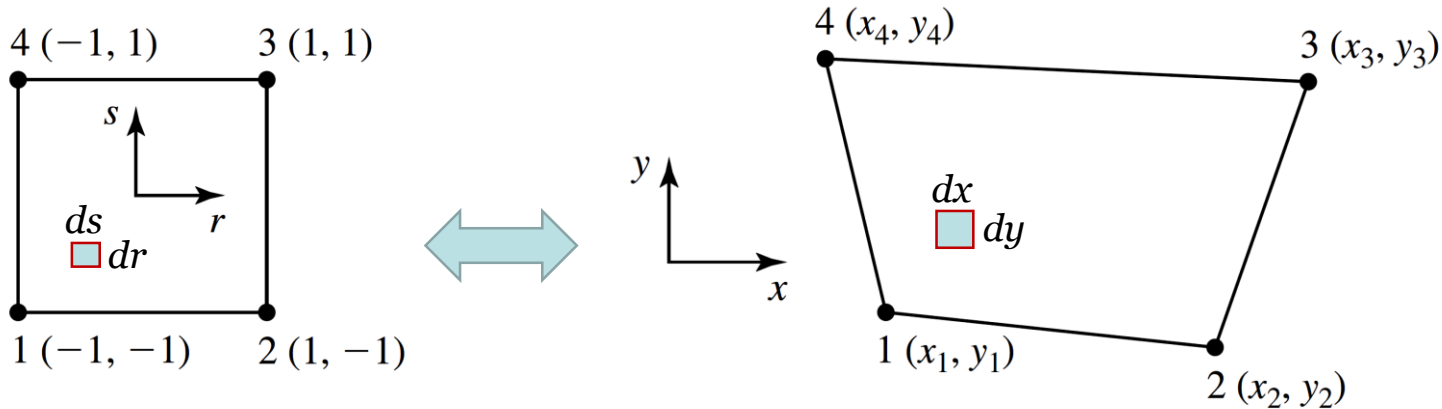
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 4$$

به عنوان مثال:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} = \left(I_{11} \frac{\partial N_i}{\partial r} + I_{12} \frac{\partial N_i}{\partial s} \right) \left(I_{11} \frac{\partial N_j}{\partial r} + I_{12} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right)$$

انسترال گیری - مختصات طبیعی



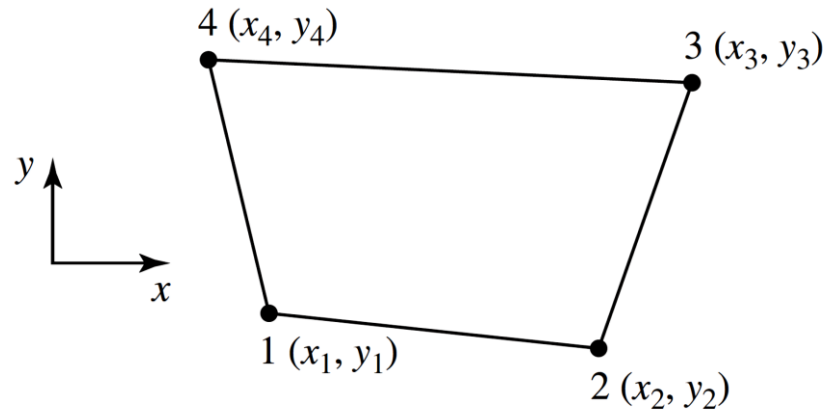
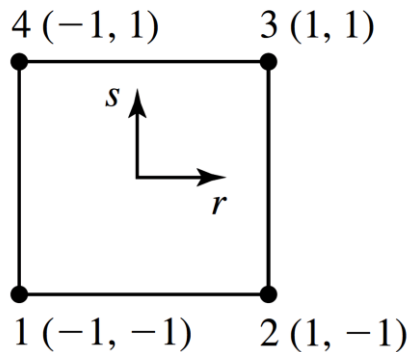
تبدیل جزء سطح از مختصات کلی به طبیعی: $dA = dx dy = |J| dr ds$

بنابراین به عنوان مثال داریم:

$$\iint_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{I}_{11} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \mathbf{I}_{12} \frac{\partial N_i}{\partial s} \right) \left(\mathbf{I}_{11} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \mathbf{I}_{12} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right) |J| dr ds$$

مثال ۲

ماتریس ژاکوبین را برای یک المان چهارضلعی چهارگرهی دوبعدی تعیین کنید.



حل:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$N_1(r, s) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s)$$

$$N_2(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s)$$

$$N_3(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s)$$

$$N_4(r, s) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)$$

مثال ۲

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i = \frac{1}{4} [-(1-s)x_1 + (1-s)x_2 + (1+s)x_3 - (1+s)x_4]$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i = \frac{1}{4} [-(1-s)y_1 + (1-s)y_2 + (1+s)y_3 - (1+s)y_4]$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i = \frac{1}{4} [-(1-r)x_1 - (1+r)x_2 + (1+r)x_3 + (1-r)x_4]$$

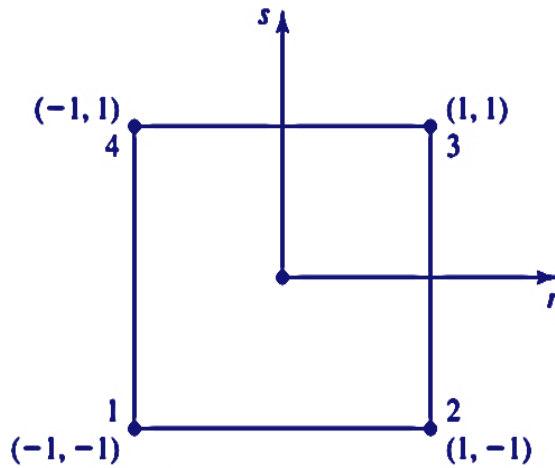
$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i = \frac{1}{4} [-(1-r)y_1 - (1+r)y_2 + (1+r)y_3 + (1-r)y_4]$$

بنابراین داریم:

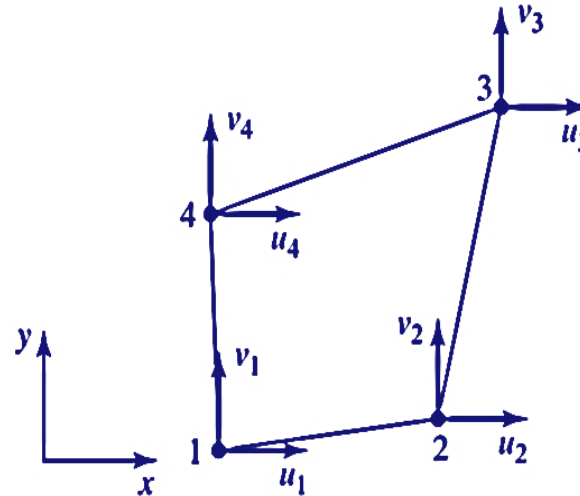
$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-s)(x_2 - x_1) + (1+s)(x_3 - x_4) & (1-s)(y_2 - y_1) + (1+s)(y_3 - y_4) \\ (1-r)(x_4 - x_1) + (1+r)(x_3 - x_2) & (1-r)(y_4 - y_1) + (1+r)(y_3 - y_2) \end{bmatrix}$$

پیدا کردن انتگرال معکوس ماتریس ژاکوبین به فرم صریح به جز در موارد خاص امکان پذیر نیست. به همین دلیل فرمول بندی المان ایزوپارامتریک با استفاده از انتگرال گیری عددی، انجام می گیرد.

ماتریس سختی چهار ضلعی ایزوپارامتریک



(ب)

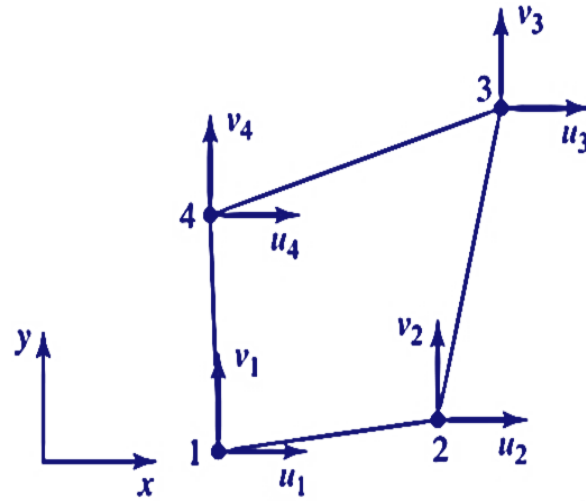


(الف)

(الف) یک المان ایزوپارامتریک دو بعدی چهارضلعی چهار گرهی.
(ب) المان مرجع در مختصات طبیعی

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) y_i$$



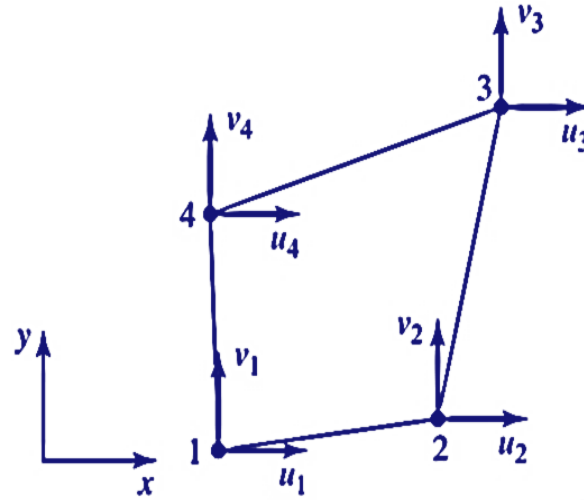
$$u(x,y) = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) u_i$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) v_i$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$



$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

برای مثال:

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i = \frac{1}{4} [(s-1)x_1 + (1-s)x_2 + (1+s)x_3 - (1+s)x_4]$$

J_{11} یک چند جمله‌ای مرتبه‌ی اول در مختصات (نگاشت) طبیعی s است.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$[G]$ ماتریس نگاشت هندسی

$\{d1\}$ بردار مشتقات تغییر مکان
نسبت به مختصات طبیعی

ماتریس ستونی موجود در انتهای سمت راست رابطه (۱) :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix}}_{\{d1\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix}}_{[P]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}}_{[\delta]} \quad (2)$$

ماتریس مشتقات جزئی توابع درونیاب

بردار جابجایی گرهی

با ترکیب روابط (۱) و (۲)، رابطه‌ای مطلوب برای مؤلفه‌های کرنش بر حسب مؤلفه‌های جابجایی گرهی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= [G]\{d1\} \\ \{d1\} &= [P] \{\delta\} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \{\varepsilon\} = \underbrace{[G][P]}_{[B]} \{\delta\} \quad (4)$$

و ماتریس سختی المان با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= t \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (5) \\ dA &= dx dy = |J| dr ds \end{aligned}$$

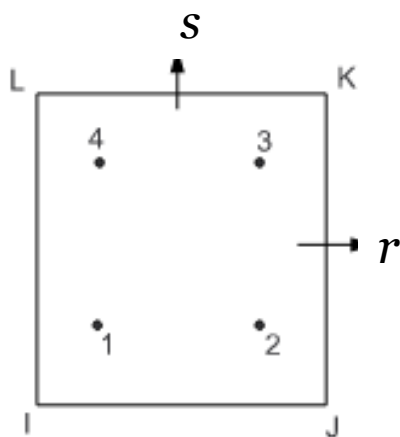
$$\longrightarrow [k^{(e)}] = t \int_A [B]^T [D] [B] |J| dr ds = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| dr ds$$

ماتریس سختی چهار ضلعی ایزوپارامتریک

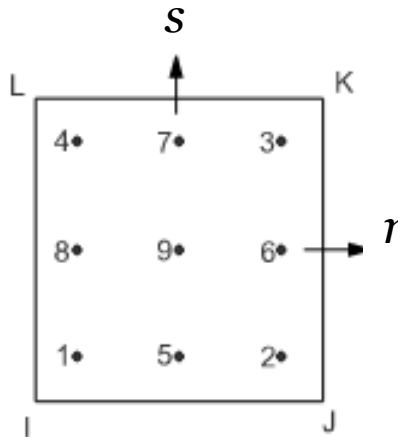
درایه‌های ماتریس $[B]$ همانند ژاکوبین $|J|$ ، توابع معلومی از مختصات طبیعی هستند.

با انتخاب تعداد p نقطه‌ی انتگرالی برای متغیر r ، و با q نقطه‌ی انتگرالی برای متغیر s ، ماتریس سختی را می‌توان با رابطه‌ی زیر تقریب زد:

$$[k^{(e)}] = t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q W_i W_j [B(r_i, s_j)]^T [D] [B(r_i, s_j)] |J(r_i, s_j)| dr ds$$



دو نقطه در هر جهت



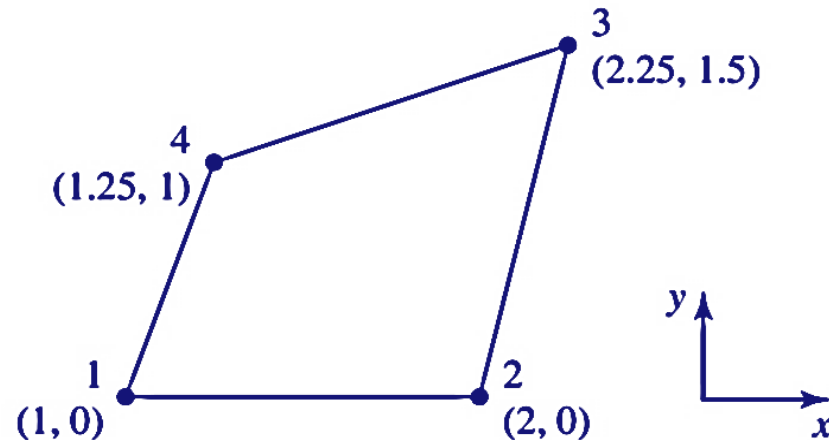
سه نقطه در هر جهت

موقعیت نقاط گوس
در فضای دوبعدی:

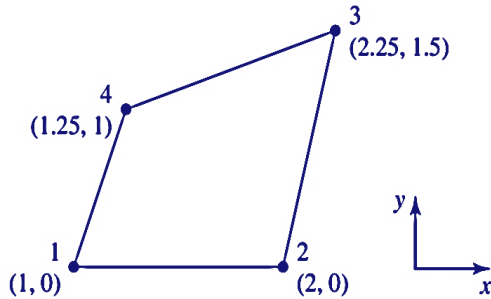
مثال ۳

ماتریس سختی المان چهار ضلعی ایزوپارامتریک نشان داده شده در شکل را برای حالت تنش صفحه‌ای به دست آورید.

$$t = 1 \text{ in.} \quad \nu = 0.3, \quad E = 30(10)^6 \text{ psi}$$



مثال ۳



$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) y_i$$

حل

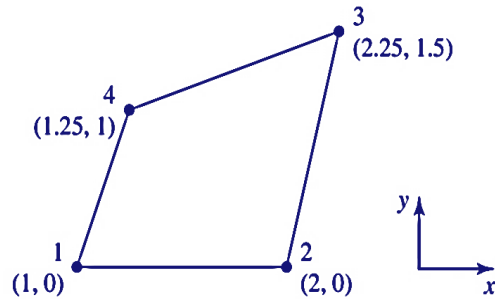
$$x(r, s) = \frac{1}{4} \left[(1-r)(1-s)(1) + (1+r)(1-s)(2) + (1+r)(1+s)(2.25) + (1-r)(1+s)(1.25) \right]$$

توابع نگاشت عبارتند از:

$$y(r, s) = \frac{1}{4} \left[(1-r)(1-s)(0) + (1+r)(1-s)(0) + (1+r)(1+s)(1.5) + (1-r)(1+s)(1) \right]$$

و درایه‌های ماتریس ژاکوبین به صورت زیر می‌باشند:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2} & J_{12} &= \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{4} (0.5 + 0.5s) \\ J_{21} &= \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{8} & J_{22} &= \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{4} (2.5 + 0.5r) \end{aligned}$$



$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2}$$

$$J_{12} = \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{4}(0.5 + 0.5s)$$

$$J_{21} = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{8}$$

$$J_{22} = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{4}(2.5 + 0.5r)$$

مثال ۳

لذا دترمینان ژاکوبین برابر است با:

$$|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = \frac{1}{32}(9.5 + 4r - 0.5s)$$

بنابراین ماتریس هندسی $[G]$ بر حسب r و s معلوم می‌شود.

$$[G] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \frac{8}{9.5 + 4r - 0.5s} \begin{bmatrix} 2.5 + 0.5r & -(0.5 + 0.5s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & 2 & 2.5 + 0.5r & -(0.5 + 0.5s) \end{bmatrix}$$

مثال ۳

$$N_1(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_2(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_4(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$[P] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} s-1 & 1-s & 1+s & -(1+s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r-1 & -(1+r) & 1+r & 1-r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-1 & 1-s & 1+s & -(1+s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-1 & -(1+r) & 1+r & 1-r \end{bmatrix}$$

$$[B] = [G][P]$$

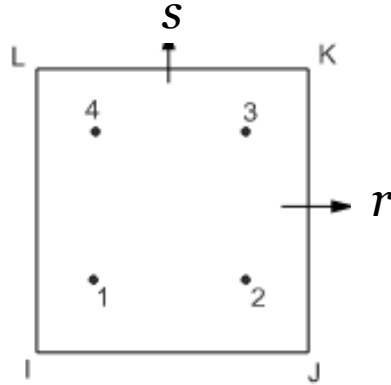
مثال ۳

با توجه به مقادیر داده شده، **ماتریس خواص مصالح در حالت تنش صفحه‌ای** برابر است با:

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D] = 32.97(10)^6 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \text{ psi}$$

مثال ۳



در این مثال ماتریس سختی در مختصات طبیعی بالاتر از درجه دو نیست. از این رو چهار نقطه

$$r_i = s_j = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

انتگرال گیری به صورت زیر انتخاب می شود:

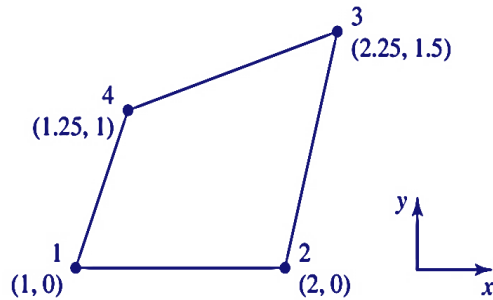
و ضرایب وزنی عبارتند از:

$$W_i = W_j = 1.0$$

ماتریس سختی المان با رابطه زیر حاصل می شود:

$$\left[k^{(e)} \right] = t \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j \left[B(r_i, s_j) \right]^T [D] \left[B(r_i, s_j) \right] \left| J(r_i, s_j) \right|$$

مثال ۳



نتایج عددی این مثال از طریق نوشتن یک برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار متلب با استفاده از توابع ماتریسی موجود در این نرم‌افزار، مطابق زیر به دست آمده‌اند

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 2305 & -1759 & -617 & 72 & 798 & -152 & -214 & -432 \\ -1759 & 1957 & 471 & -669 & -52 & -522 & 14 & 560 \\ -617 & 471 & 166 & -19 & -214 & 41 & 57 & 116 \\ 72 & -699 & -19 & 616 & -533 & 633 & 143 & -244 \\ 798 & -52 & -241 & -533 & 1453 & -169 & -389 & -895 \\ -152 & -522 & -41 & 633 & -169 & 993 & 45 & -869 \\ -214 & 14 & 57 & 143 & -389 & 45 & 104 & 240 \\ -432 & 560 & 116 & -244 & -895 & -869 & 240 & 1524 \end{bmatrix} 10^3 \frac{lb}{in}.$$